$\boxed{m^n \text{ と } \quad n^m \quad \text{の値の比較}}$

次の関数

$$f(x) = \frac{logx}{x} \qquad (x > 0) \tag{1}$$

を利用していくつか問題をやってみよう。

まず最初に　π^e　と　e^π　の大小関係を調べてみよう。

(1) を微分してみると

$$f'(x) = \frac{(logx)'x - logx(x)'}{x^2} = \frac{1 - logx}{x^2} \tag{2}$$

となる。増減表をつくると

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

となる。
$\lim_{x \to +0} f(x)$=-∞ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$=0 なので
$f(x)$ のグラフをかくと、図 1 のようになる。

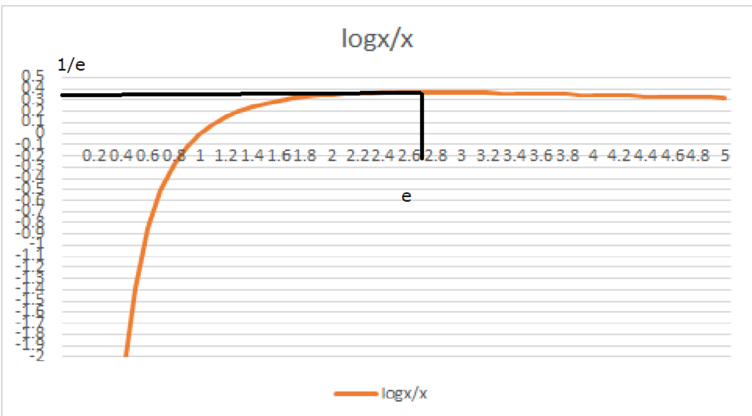

図 1: y=logx/x のグラフ

図１　より

$f(x) = \frac{logx}{x}$ は　$x > 0$ で　　$x = e$ のとき　$\frac{1}{e}$　が最大値となる。

さて、$f(\pi) = \frac{log\pi}{\pi} < \frac{1}{e}$ より $elog\pi < \pi = \pi \mathrm{log} e$

ゆえに、　$log\pi^e < \mathrm{log} e^\pi$　　底が１より大きいので　　$\therefore \pi^e < e^\pi$

次の問題にいこう。

$$m^n = n^m (m < n) \tag{3}$$

となる自然数は、$(m, n) = (2, 4)$ の 1 組しかないことを示そう。

(3) の両辺の mn 乗根をとると、　$\sqrt[mn]{m^n} = \sqrt[mn]{n^m}$

指数表示にすると

$$m^{\frac{1}{m}} = n^{\frac{1}{n}} \tag{4}$$

(4) の両辺を底 e の対数をとると　$\frac{logm}{m} = \frac{logn}{n}$

$f(x) = \frac{logx}{x}$　$(x > 0)$ は、図１のグラフで確認した通り、$0 < x < e$ で単調増加、$x > e$ で単調減少なので、$x > e$ の範囲で条件を満たす m と n は存在しない。

ゆえに、m は $0 < m < e$ を満たす自然数である。したがって、$m = 1$ または 2 しかありえない。

$m = 1$ の場合、$n = 1$ となるので、不適。

ゆえに $m = 2$ 、$n = 4$ のときのみ、1 組だけ関係が成り立つ。

$\because 2^4 = 4^2 = 16$