メルセンヌ素数

$2^p - 1$ が素数ならば、p は素数である。

$2^2 - 1 = 3$ より 3 はメルセンヌ素数である。

$2^3 - 1 = 7$ より 7 はメルセンヌ素数である。

$2^{11} - 1 = 2047$ より $2047 = 23 \times 89$ より 2047 は素数でない。

つまり、逆は成り立たない。p が素数でも、$2^p - 1$ は素数とはならない。

問）$3^n - 2^n$ が素数ならば、n は素数である。

「n が素数でないならば $3^n - 2^n$ が素数でない」　をいえばよい。

$n = ab$（合成数）とおく。ただし a、b は 2 以上の自然数とする。

$3^{ab} - 2^{ab}$
$= (3^a - 2^a)((3^a)^{b-1} + (3^a)^{b-2}(2^a) + (3^a)^{b-3}(2^a)^2 + \cdots + (3^a)(2^a)^{b-2} + (2^a)^{b-1})$

で明らかに　$3^a - 2^a \geqq 2$　で、さらに

$(3^a)^{b-1} + (3^a)^{b-2}(2^a) + (3^a)^{b-3}(2^a)^2 + \cdots + (3^a)(2^a)^{b-2} + (2^a)^{b-1}) \geqq 2$

より　$3^{ab} - 2^{ab}$　は合成数となる。

n が素数でないならば $3^n - 2^n$ が素数でない。つまり、$3^n - 2^n$ が素数ならば、n は素数である。