次の式で与えられる

$$\frac{e\sqrt[3]{e}\sqrt[5]{e}\sqrt[7]{e}\cdots}{\sqrt{e}\sqrt[4]{e}\sqrt[6]{e}\sqrt[8]{e}\cdots} \tag{1}$$

の値を求めてみよう。

（１）の分子は

$$e\sqrt[3]{e}\sqrt[5]{e}\sqrt[7]{e}\cdots = e^1 e^{\frac{1}{3}} e^{\frac{1}{5}} e^{\frac{1}{7}} \cdots = e^{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots} \tag{2}$$

となる。

さらに、（１）の分母は

$$\sqrt{e}\sqrt[4]{e}\sqrt[6]{e}\sqrt[8]{e}\cdots = e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{6}} e^{\frac{1}{8}} \cdots = e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots} \tag{3}$$

となる。ゆえに、（１）は

$$e^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots} \tag{4}$$

と変形できる。唐突だが、

$$\log(1+x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \tag{5}$$

とおく。　$x = 0$ を代入すると、　$a_0 = 0$ となる。

さらに、（５）を微分すると

$$\frac{1}{1+x} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots \tag{6}$$

となり、 $x=0$ を代入すると、 $a_1=1$ となる。

さらに、（6）を微分すると

$$\frac{-1}{(1+x)^2}=2a_2+3\cdot 2a_3x+4\cdot 3a_4x^2+5\cdot 4a_5x^3+\cdots \tag{7}$$

となり、 $x=0$ を代入すると、 $a_2=-\frac{1}{2}$ となる。

さらに、(7) を微分すると

$$\frac{2}{(1+x)^3}=3\cdot 2a_3+4\cdot 3\cdot 2a_4x+5\cdot 4\cdot 3a_5x^2+\cdots \tag{8}$$

となり、 $x=0$ を代入すると、 $a_3=\frac{1}{3}$ となる。 これを続けると

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots \tag{9}$$

となる。(9) に $x=1$ を代入すると $\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ となる。ゆえに、

(1) は、

$$\frac{e\sqrt[3]{e}\sqrt[5]{e}\sqrt[7]{e}\cdots}{\sqrt{e}\sqrt[4]{e}\sqrt[6]{e}\sqrt[8]{e}\cdots}=e^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots}=e^{log2}=2 \tag{10}$$

ということで、シンプルに 2 となる。