

問)  $x, y$  は実数とする。

$(\frac{2+\sqrt{-77}}{9})^{2021} = \frac{x+y\sqrt{-77}}{9}$  のとき、 $x^2 + 77y^2$  の値を求めよ。

$\alpha = \frac{2+\sqrt{-77}}{9}$  とおく。極座標表示してみよう。

$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$  とおくと、 $r = (\frac{2}{9})^2 + (\frac{\sqrt{77}}{9})^2 = 1$  より

$\alpha^{2021} = r^{2021}(\cos 2021\theta + i\sin 2021\theta) = \cos 2021\theta + i\sin 2021\theta$  となる。

条件より

$$\cos 2021\theta = \frac{x}{9}, \quad \sin 2021\theta = \frac{y\sqrt{77}}{9}$$

$$\cos^2 2021\theta + \sin^2 2021\theta = (\frac{x}{9})^2 + (\frac{y\sqrt{77}}{9})^2 = 1$$

ゆえに  $x^2 + 77y^2 = 81$