

問)  $7^{45}$ の下3桁はいくつですか？

$$N = 7^{45} = (7^2)^{22} \times 7 = 49^{22} \times 7 = (50 - 1)^{22} \times 7$$

$$\begin{aligned} A &= (50 - 1)^{22} = 50^{22} + {}^{22}C_1 \times 50^{21} \times (-1) + {}^{22}C_2 \times 50^{20} \times (-1)^2 \\ &+ \dots + {}^{22}C_{19} \times 50^3 \times (-1)^{19} + {}^{22}C_{20} \times 50^2 \times (-1)^{20} \\ &+ {}^{22}C_{21} \times 50 \times (-1)^{21} + (-1)^{22} \end{aligned}$$

$50^3$ の項から $50^{22}$ の項は1000で割り切れるので

$$\begin{aligned} A &\equiv {}^{22}C_2 \times 2500 - {}^{22}C_1 \times 50 + 1 \pmod{1000} \\ &\equiv 500 - 100 + 1 = 401 \pmod{1000} \end{aligned}$$

$$N = A \times 7 \equiv 401 \times 7 = 2807 \equiv 807 \pmod{1000}$$

下3桁は 807 である。