相加平均　相乗平均

$a>0$ 、 $b>0$ 、 $c>0$ 、$d>0$ で

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \tag{1}$$

を利用して

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \tag{2}$$

を示す。

(証明)

$$d = \frac{a+b+c}{3} \text{とおく。} \tag{3}$$

$d>0$ より、（１）に代入

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}} \tag{4}$$

両辺を４乗すると

$$\left(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\right)^4 \geq abc\frac{a+b+c}{3} \tag{5}$$

左辺の（　）内を変形すると

$$\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} = \frac{a+b+c}{3} \tag{6}$$

より

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc\frac{a+b+c}{3} \tag{7}$$

両辺を

$$\frac{a+b+c}{3} \tag{8}$$

で割って

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc \tag{9}$$

両辺の３乗根をとって

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \tag{10}$$

さらに

$a>0$ 、 $b>0$ 、 $c>0$ 、$d>0$ で

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \tag{11}$$

を利用して

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd} \tag{12}$$

を示す。

(証明)

（１２）で（１１）を利用すると

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd} \tag{13}$$

ただし、すべての等号が成りたつのは、a=b=c=d のときである。

以上のことより

すべての自然数 n で
$a_n > 0$ で

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdots a_n} \tag{14}$$

等号がなりたつのは　$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n$ のときである。

それでは、上記の相加平均　相乗平均の関係を利用して

50^{99} と　$99!$

の値を比較してみよう。

相加平均　相乗平均　の関係を使うと

$$\sqrt[99]{99!} = \sqrt[99]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99} \leq \frac{1+2+3+\cdots+99}{99} = \frac{\frac{99(1+99)}{2}}{99} = 50 \tag{15}$$

1 から 99 まで値が違うので、（１５）の不等号部分の等号は一致しない。
つまり

$$\sqrt[99]{99!} < 50 \tag{16}$$

ゆえに 50^{99} は　$99!$　より大きいことがわかる。