

問) $\sqrt[6]{26 + 15\sqrt{3}} - \sqrt[6]{26 - 15\sqrt{3}}$ の値を求めよ。

$$\alpha = \sqrt[6]{26 + 15\sqrt{3}}、\beta = \sqrt[6]{26 - 15\sqrt{3}} \text{ とおく。}$$

$$\alpha^6 + \beta^6 = 52、\alpha\beta = \sqrt[6]{26^2 - (15\sqrt{3})^2} = \sqrt[6]{676 - 675} = 1$$

$$\alpha^6 + \beta^6 = (\alpha^2 + \beta^2)^3 - 3\alpha^2\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = t \text{ とおくと } t^3 - 3t - 52 = 0$$

$$(t - 4)(t^2 + 4t + 13) = 0、t \text{ は実数より、} t = 4 \text{ である。}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4 \text{ なので } (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 4 - 2 = 2$$

$$\alpha - \beta = \pm\sqrt{2}、\text{明らかに } \alpha > \beta \text{ より } \alpha - \beta = \sqrt{2}$$