$\boxed{\text{ネイピア数 } e \text{ の性質}}$

関数 y $= a^x$ 上の点 (0,1) における接線の傾きが 1 となる a を e とする。

微分の定義より、

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \tag{1}$$

となる。これを定義にしている場合が結構ある。

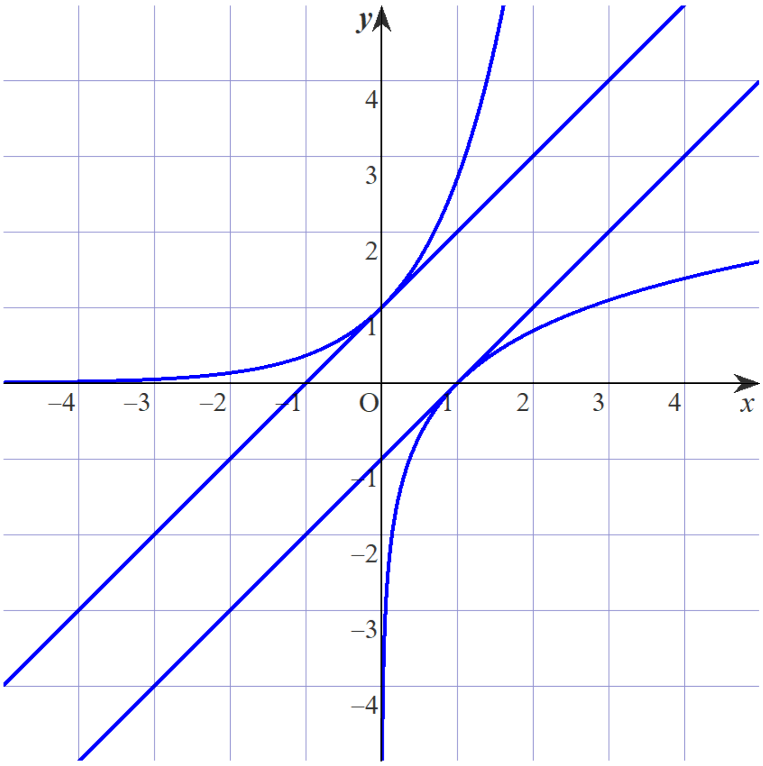

図 1: $y = e^x$ と $y = logx$ のグラフ

図 1 は、$y = e^x$ と $y = logx$ のグラフ である。　直線 $y = x$ に関して対称である。

関数 y $= logx$ 上の点 (1,0) における接線の傾きが 1 となる。

微分の定義より

$$\lim_{h \to 0} \frac{log(1+h)}{h} = 1 \tag{2}$$

(2) より、(3) を導くことができる。これを e の定義にしている場合もある。

$$\lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} = e \tag{3}$$

少し形を変えよう。 $\frac{1}{h} = n$ とおくと、h $\to$ 0 のとき　$n \to \infty$　より

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{4}$$

二項定理を利用して

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =& 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots \\ & \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 321}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n\end{aligned} \tag{5}$$

(5) の右辺の各項を一般化して、k で表すと

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^k \tag{6}$$

$n \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{k!} \tag{7}$$

となる。つまり　e は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{8}$$

と表すことができる。

（参考）

h	1/h	(1+h)^(1/h)		n	1/n!	Σ1/n!
1	1	2		0	1	1
0.1	10	2.59374246		1	1	2
0.01	100	2.704813829		2	2	2.5
0.001	1000	2.716923932		3	6	2.666666667
0.0001	10000	2.718145927		4	24	2.708333333
0.00001	100000	2.718268237		5	120	2.716666667
0.000001	1000000	2.718280469		6	720	2.718055556
1E-07	10000000	2.718281694		7	5040	2.718253968
1E-08	100000000	2.718281798		8	40320	2.71827877
1E-09	1000000000	2.718282052		9	362880	2.718281526
1E-10	10000000000	2.718282053		10	3628800	2.718281801
1E-11	1E+11	2.718282053		11	39916800	2.718281826

図 2: ネイピア数 e の値