$\boxed{[(7+\sqrt{41})^{2021}] \text{ を } 2^{2021} \text{ で割った余りを求めよ。}}$

$\alpha = 7+\sqrt{41}$ 、 $\beta = 7-\sqrt{41}$ とおく。

$\alpha+\beta = 14$ 、$\alpha\beta = 8$

$a_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。

$(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})(\alpha+\beta) = \alpha^n + \beta^n + \alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})$ より

$a_n = (\alpha+\beta)a_{n-1} - \alpha\beta a_{n-2} = 14a_{n-1} - 8a_{n-2}$

次に a_nが 2^n(すべての自然数 n) で割り切れることを確認しよう。 (1)

$a_1 = \alpha+\beta = 14 = 2\times 7$ より $n=1$ は成り立つ。

$a_2 = \alpha^2+\beta^2 = 14^2 - 2\times 8 = 180 = 2^2\times 45$ より $n=2$ も成り立つ。

$n=k(k\geq 2)$ で成り立つと仮定すると a_k が 2^k で割り切れる。

$a_{k+1} = 14a_k - 8a_{k-1} = 7\times 2a_k - 2\times 2^2a_{k-1}$

$2a_k$ も 2^2a_{k-1} も 2^{k+1} で割り切れるので、a_{k+1} も 2^{k+1} で割り切れる。

(1) は成り立つので、a_{2021} は 2^{2021} で割り切れる。

$0<\beta<1$ より β^{2021} はかなり微小な値である。

$a_{2021} = \alpha^{2021} + \beta^{2021}$ の関係から、$[\alpha^{2021}] = a_{2021} - 1$

$[\alpha^{2021}] \equiv -1(mod 2^{2021})$ より、求める余りは $2^{2021}-1$ である。