

$$\boxed{\pi > 3.05}$$

半径1の円に内接する正二十四角形の面積を求めてみよう。

正二十四角形を24等分に三角形に分割すると、ひとつあたりの面積は、

$$S = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 15^\circ \quad \text{である。}$$

二倍角の公式  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  を利用する。

$$\theta = 15^\circ \text{ とすると、} \quad \cos 30^\circ = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$$

$$\sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 15^\circ > 0 \quad \text{より} \quad \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$1.41 < \sqrt{2} < 1.42, \quad 2.44 < \sqrt{6} < 2.45 \quad \text{なので}$$

$$2.44 - 1.42 < \sqrt{6} - \sqrt{2} < 2.45 - 1.41 \quad \text{となる。}$$

$$1.02 < \sqrt{6} - \sqrt{2} < 1.04 \quad (1)$$

正二十四角形の面積は、以下の通りである。

$$24S = 24 \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin 15^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 3 \times (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \quad (2)$$

(1)、(2) より

$$3.06 < (\text{正二十四角形の面積}) < 3.12 \quad (3)$$

$\pi = (\text{半径1の円の面積}) > (\text{正二十四角形の面積}) > 3.06$  となるんで、

$$\therefore \pi > 3.05$$