問）p^q+q^p+7 を pq で割り切れるようにしたい。ただし、p、q は素数とする。

(1) $p=q$ とすると $p^q+q^p+7=2p^p+7\equiv 7$（$mod p^2$）

7 は素数の 2 乗で割り切れることはない。ゆえに　$p\neq q$

(2) $p>q$ とし、とりあえず $q=2$ とおくと

$p^q+q^p+7=p^2+2^p+7=p^2+2(2^{p-1}-1)+9$ より p^2+2^p+7 が $2p$ で割り切れるためには、

フェルマーの小定理 $2^{p-1}-1\equiv 0(mod p)$ を使って、さらに p^2+2^p+7 は偶数なので、$9\equiv 0(\mathrm{modp})$ が必要である。

ゆえに、$p=3$ となる。　$(p,q)=(3,2)$

(3) $p>q>2$ とし　$p^q+q^p+7=p(p^{q-1}-1)+q(q^{p-1}-1)+p+q+7$ と変形して

フェルマーの小定理 $q^{p-1}-1\equiv 0(mod p)$、$p^{q-1}-1\equiv 0(mod q)$ より、$p^q+q^p+7\equiv p+q+7\equiv 0(mod pq)$ がいえればよい。

$p+q+7\geqq pq$ 、 $pq-p-q\leqq 7$　、　$(p-1)(q-1)\leqq 8$

明らかに　$p<7$ なので　条件 $(p-1)(q-1)\leqq 8$ を満たすものは、$(p,q)=(5,3)$ で

さらに、$p+q+7=5+3+7=15(mod 15)$ より、これも条件を満たす。

対称形なので、$(p,q)=(2,3),(3,2),(3,5),(5,3)$ が答えである。