問）$5^{5^{5^5}}$ を 7 で割ったときの余りを求めよ。

5^n を 7 で割ったときの余り　つまり　$mod7$ について調べてみよう。

$5^1 \equiv 5$

$5^2 \equiv 25 \equiv 4$

$5^3 \equiv 20 \equiv 6$

$5^4 \equiv 30 \equiv 2$

$5^5 \equiv 10 \equiv 3$

$5^6 \equiv 15 \equiv 1$

あとは循環しそう。例えば、　$5^{100} \equiv 5^{6\times 16+4} \equiv 5^4 \equiv 2$ なんてね。

5^{5^5} を 6 で割った余り　つまり　$mod6$ が分かれば解決しそう。

$5^{5^5} = (6-1)^{5^5} \equiv (-1)^{5^5}$　となるが、　5^5　は明らかに奇数なので

$5^{5^5} = (6-1)^{5^5} \equiv (-1)^{5^5} \equiv -1 \equiv 5(mod6)$

$5^{5^5} = 6p+5$(ただし p は正の整数) と表すことができる。

ゆえに、$5^{5^{5^5}} \equiv 5^5 \equiv 3(mod7)$