

問) $a^4 + b^4 + 2 = c^4$ を満たす整数の組 (a, b, c) は存在しないことを示せ。

フェルマーの小定理より、

a と 5 が互いに素ならば、 $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$ また、 a が 5 の倍数ならば、 $a^4 \equiv 0 \pmod{5}$

$a^4 \equiv 0, 1 \pmod{5}$ である。同様に、 $b^4 \equiv 0, 1 \pmod{5}$ 、 $c^4 \equiv 0, 1 \pmod{5}$ になる。

$a^4 + b^4 + 2 \equiv 2, 3, 4 \pmod{5}$ となり、 $c^4 \equiv 0, 1 \pmod{5}$ と矛盾する。

$a^4 + b^4 + 2 = c^4$ を満たす整数の組 (a, b, c) は存在しない。