$f(x) = x^n e^{-x} (n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。

(1) $f(x)$ は、$0 < x < 1$ で単調増加で、$f(0) = 0$、$f(1) = \frac{1}{e}$ である。(グラフ参照)

(2) $a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ (n=1,2,3,$\cdots$) は　$0 < a_n < \frac{1}{e} < 1$ である。

計算すると

$a_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \int_0^1 x^n (-e^{-x})' dx$

$= [-x^n e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} (-e^{-x}) dx$

$= -\frac{1}{e} + n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx = -\frac{1}{e} + n a_{n-1}$

となる。

(3)$b_n = \frac{a_n}{n!}$ とおくと

$\frac{a_n}{n!} = -\frac{1}{n!e} + \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}$ より　　$b_n = -\frac{1}{n!e} + b_{n-1}$

となる。

$n = 2, 3, \cdots$ と代入すると

$b_2 = -\frac{1}{2!]e} + b_1$

$b_3 = -\frac{1}{3!e} + b_2$

$b_4 = -\frac{1}{4!e} + b_3$

$\ldots\ldots$

$b_n = -\frac{1}{n!e} + b_{n-1}$

辺々加えて整理すると

$b_n = -\frac{1}{e}(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}) + b_1$

$b_1 = a_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx = \int_0^1 x(-e^{-x})'dx$

$= [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1(-e^{-x})dx = -\frac{2}{e} + 1$

$n \to \infty$　とすると　$b_n \to 0$　より

$0 = -\frac{1}{e}(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots) - \frac{2}{e} + 1$

さらに、$e =$ の形に変形すると

$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

となる。