

問) 5777 を 2 通りで平方の和($\circ^2+\triangle^2$)で表しなさい。※ \circ と \triangle の入れ替えは不可とする。
ただし、5777 を素因数分解すると、 53×109 となることは既知とする。

まず、 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=m^2+n^2$ を確認しよう。もちろん、 a, b, c, d, m, n は整数とする。

複素数を導入すると簡単にできそうです。

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2) &= \{(a+bi)(a-bi)\}\{(c+di)(c-di)\} = \{(a+bi)(c+di)\}\{(a-bi)(c-di)\} \\ &= \{(ac-bd)+(ad+bc)i\}\{(ac-bd)-(ad+bc)i\} \\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2\end{aligned}$$

ゆえに $m=ac-bd$ $n=ad+bc$ とすればよい。

$$53=2^2+7^2 \quad , \quad 109=3^2+10^2$$

とそれぞれ平方の和とできるので、

$$a=7 \quad b=2 \quad c=10 \quad d=3 \quad \text{とすると} \quad ac-bd=64 \quad ad+bc=41$$

$$a=7 \quad b=2 \quad c=3 \quad d=10 \quad \text{とすると} \quad ac-bd=1 \quad ad+bc=76$$

ゆえに $5777=64^2+41^2=1^2+76^2$ となる。