問）$z=cos\frac{2}{9}\pi+isin\frac{2}{9}\pi$ のとき、次の問いに答えよ。

（1）$\alpha=z+z^8$ のとき、α を解とする整数係数の３次方程式をつくれ。

ド・モアブルの定理より、$z^9=1$ より、$\alpha=z+\frac{1}{z}$ である。

z と $\frac{1}{z}$ は、共役な複素数より、

$\alpha=2cos\frac{2}{9}\pi$ となる。ここで、３倍角の公式を使おう。

$cos3\theta=4cos^3\theta-3cos\theta$ より

$cos\frac{2}{3}\pi=4cos^3\frac{2}{9}\pi-3cos\frac{2}{9}\pi=-\frac{1}{2}\cdots$※

$cos\frac{2}{9}\pi$ に、$\frac{\alpha}{2}$ を代入して整理すると、$\alpha^3-3\alpha+1=0$

求める３次方程式は、　$\underline{x^3-3x+1=0}$

（2）（1）で作成した方程式の他の２つの解をαの２次以下の式で表せ。

※を満たすθは、$\frac{2}{9}\pi$だけでなく、$\frac{4}{9}\pi$、$\frac{8}{9}\pi$でも可。

それぞれ、β、γとすると、２倍角の公式より、

$cos\frac{4}{9}\pi = 2cos^2\frac{2}{9}\pi - 1$

$\frac{\beta}{2} = 2(\frac{\alpha}{2})^2 - 1$より整理すると、$\underline{\beta = \alpha^2 - 2}$

$cos\frac{8}{9}\pi = 2cos^2\frac{4}{9}\pi - 1$

$\frac{\gamma}{2} = 2(\frac{\beta}{2})^2 - 1$より整理すると、$\underline{\gamma = \beta^2 - 2}$

$\gamma = \beta^2 - 2 = (\alpha^2 - 2)^2 - 2 = \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2$

$\alpha^3 = 3\alpha - 1$ より、

$\gamma = \alpha^4 - 4\alpha^2 + 2 = \underline{-\alpha^2 - \alpha + 2}$

ゆえに、他の２つの解は$\underline{\alpha^2 - 2}$、$\underline{-\alpha^2 - \alpha + 2}$と表せる。