問) $x^2-6x-1=0\cdots$（１）の２つの解を$\alpha,\beta(\alpha>\beta)$ とおくとき、$\alpha^{1002}$　の一の位を求めよ。

（１）を解くと　$x=3\pm\sqrt{10}$

ゆえに、$\alpha=3+\sqrt{10},\beta=3-\sqrt{10}$

$a_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくと

$a_{n+2}-6a_{n+1}-a_n=0\cdots$（２）となる。

$a_1=\alpha+\beta=6\equiv6(mod10)$
$a_2=\alpha^2+\beta^2=6^2-2\times(-1)\equiv8(mod10)$
（２）より　$a_3=6a_2+a_1\equiv6\times8+6\equiv4(mod10)$
$a_4=6a_3+a_2\equiv6\times4+8\equiv2(mod10)$
$a_5=6a_4+a_3\equiv6\times2+4\equiv6(mod10)$

ゆえに　$a_n$ の一の位は　6　8　4　2　の順番にループする。

$a_{1002}$ の一の位は $1002=4\times250+2$ より 8 である。

$\alpha^{1002}=a_{1002}-\beta^{1002}$ で $\beta=3-\sqrt{10}$ より　$-1<\beta<0$ なので $0<\beta^{1002}<1$ である。

ゆえに　　$\alpha^{1002}$ の一の位は　7