

問)  $2^a+3^b=n^2$  …①を満たす自然数  $a,b,n$  をすべて求めよ。

$$\textcircled{1}\text{から } 2^a+3^b \equiv (-1)^a \quad n^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

より  $a$  は偶数である。  $a=2x$  とおく。

$$\textcircled{1}\text{を変形して } 3^b=n^2-2^{2x}=(n+2^x)(n-2^x)$$

$$n+2^x=3^{b-c}, n-2^x=3^c \text{ とおくと } \underline{2 \times 2^x=3^{b-c}-3^c=3^c(3^{b-2c}-1)}$$

$$\text{前行下線部より } c=0 \text{ ゆえに } 2^{x+1}=3^b-1 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2}\text{から } 2^{x+1} \equiv 0 \quad 3^b-1 \equiv (-1)^b-1 \pmod{4}$$

より  $b$  も偶数である。  $b=2y$  とおく。

$$\textcircled{2}\text{を変形して } 2^{x+1}=3^{2y}-1=(3^y+1)(3^y-1)$$

$$3^y+1=2^{x+1-d}, 3^y-1=2^d \text{ とおくと } \underline{2=2^{x+1-d}-2^d=2^d(2^{x+1-2d}-1)}$$

$$\text{下線部より } d=1, x=2 \quad \underline{\therefore a=2x=4}$$

$$\text{ゆえに } 3^y-1=2 \text{ より } y=1 \text{ なので } \underline{\therefore b=2y=2}$$

$$\textcircled{1}\text{より } 2^4+3^2=n^2 \quad \text{より } \underline{\therefore n=5}$$

$(a,b,n)=(4,2,5)$  のみが①を満たす。