問) $a^{n+1}-(a+1)^n=2001$…①を満たす自然数 a、n をすべて求めよ。

$2001=3\times23\times29\quad 2002=2\times7\times11\times13$

①の左辺が 3 で割れるためには、

$a\equiv-1$、$0\pmod 3$は不適。必然 $a\equiv1\pmod 3$となる。

$a^{n+1}\equiv1\pmod 3$より$(a+1)^n\equiv(-1)^n\equiv1\pmod 3$が必要なので、n は偶数となる。

次に

$a^{n+1}-(a+1)^n=2001\pmod a$とすると

$-1\equiv2001\pmod a$ つまり　$0\equiv2002\pmod a$

∴ a は 2002 の約数である。

さらに

$a^{n+1}-(a+1)^n=2001\pmod{a+1}$とすると

$-1\equiv2001\pmod{a+1}$ つまり $0\equiv2002\pmod{a+1}$

∴ a ＋1 は 2002 の約数である。

条件を満たすものは、a=13 のみである。

a =13、n=2x とおく。

$13^{2x+1}-14^{2x}=2001$…②

・x=1 のときは、②は満たす。

・ $x \geqq 2$ のときは、　mod8　を考えると

$13^{2x+1}-14^{2x} \equiv (-3)^{2x+1}-0 \equiv (-3)^{2x+1}$

$2001 \equiv 1$

(−3)は偶数乗のときは余りは 1（mod8）

だが奇数乗は余りは 1 にならない。

これは矛盾。ゆえに x=1 のみ。n=2

(a,n)=(13,2)