

問) $2p^4 - 1237$ が素数となる素数 p をすべて求めよ。

フェルマーの小定理 より $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$ ただし p は 5 より大きい素数とする。

$$p=2 \text{ のとき } 2 \times 2^4 - 1237 = -1205$$

$$p=3 \text{ のとき } 2 \times 3^4 - 1237 = -1075$$

ゆえに、 $p=2, 3$ のときは値が負のため、不可。

$$p=5 \text{ のとき } 2 \times 5^4 - 1237 = 13 \text{ OK である。}$$

p が 5 より大きい素数のときは $\pmod{5}$ において
 $2p^4 - 1237 \equiv 2 \times 1 - 2 \equiv 0$ つまり $2p^4 - 1237$ は 必ず 5 の倍数となる。

ゆえに、求める 素数 p は 5 のみである。