

問)  $11^n = k^2 + 12960$  を満たす整数をすべて求めよ。

$\text{mod } 3$  で  $11^n \equiv (-1)^n$   $k^2 + 12960 \equiv k^2 \equiv 0, 1$  より  $n$  は偶数である。

$n = 2m$  とおく。

$$11^{2m} = k^2 + 12960 \quad \text{より} \quad (11^m + k)(11^m - k) = 12960$$

$$11^m + k = A \cdots \textcircled{1} \quad 11^m - k = B \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad 2 \cdot 11^m = A + B \quad \textcircled{1} - \textcircled{2} \quad 2k = A - B$$

また、 $12960 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5$  より  $A$  と  $B$  はともに偶数である。

$A = 2a$   $B = 2b$  とすると  $a + b$  は  $11^m$  とならなければならない。

$$ab = 3240 \quad a = 3^4 = 81 \quad b = 2^3 \cdot 5 = 40 \quad \text{とすれば} \quad a + b = 121 = 11^2 \quad \text{となる。}$$

$$k = a - b = 81 - 40 = 41 \quad \text{※多分} \quad \text{これ以外の組み合わせはないと思う。}$$

ゆえに  $11^4 = 41^2 + 12960$