問) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ x^2+y^2+z^2=10 \\ x^3+y^3+z^3=22 \end{cases}$ を満たす x，y，z を求めよ。ただし $x \leqq y \leqq z$ とする。

$(t-x)(t-y)(t-z)=0$ を展開すると、

$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$ …①

$(x+y+z)^2= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ より

$4^2= 10+2(xy+yz+zx)$ $\therefore xy+yz+zx=3$

①は $\underline{t^3-4t^2+3t-\alpha=0}$ となる。(ただし $xyz=\alpha$ とする。)

$A_n= x^n+y^n+z^n$ とおく。

もろもろ あれこれ $\underline{A_{n+3}-4A_{n+2}+3A_{n+1}-\alpha A_n=0}$ …②

となる。 さらに、$x\neq0$ 、$y\neq0$、 $z\neq0$ も確認できるので

$A_0=3$ となる。

②に $n=0$ を代入すると $A_3-4A_2+3A_1-\alpha A_0=0$

$22-4\times10+3\times4-3\alpha=0$ $\therefore \alpha=-2$

$t^3-4t^2+3t+2=0$ を解けばよい。

$(t-2)(t^2-2t-1)=0$

ゆえに $t=2$ と $1\pm\sqrt{2}$

$\underline{\underline{x=1-\sqrt{2}、\ y=2、\ z=1+\sqrt{2}}}$