問）$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=1$ の 4 つの解を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とするとき、$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3$ の値を求めよ。

解）$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=1$ を展開すると

$x^4+10x^3+35x^2+50x+23=0$ ⋯（1） となる。

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0$ も展開してみる。

x^4-$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^3+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)x^2$-$(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta=0\cdots$（2）となる。

(1) と (2) を比較すると

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-10\cdots$（3）
$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=35\cdots$（4）
$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-50\cdots$（5）
$\alpha\beta\gamma\delta=23\cdots$（6）

ここで $An=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n$ とおく。

あれやこれやで
$A_{n+4}+10A_{n+3}+35A_{n+2}+50A_{n+1}+23A_n=0$ ⋯（7）
がいえる。

$A_1=\alpha+\beta+\gamma+\delta=-10$

$A_2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$
$=(-10)^2-2*35=30$

$A_0=4$

$A_{-1}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta}{\alpha\beta\gamma\delta}=-\frac{50}{23}$

(7) の n に-1 を代入して

A_3+10A_2+35A_1+50A_0+23A_{-1}=0

A_3=-10A_2-35A_1-50A_0-23A_{-1} =-10*30-35*(-10)-50*4-23*(-$\frac{50}{23}$) =-300+350-200+50=-100

ゆえに$\underline{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=-100}$ である。