

$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$ を満たす実数解を求めよ。

$t = \sqrt[3]{2x - 1}$ とおく。

次のように、2つの式に分けられる。

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ t^3 + 1 = 2x \end{cases}$$

差をとると $x^3 - t^3 = 2(t - x)$

$$(x - t)(x^2 + xt + t^2) = 2(t - x)$$

$$(x - t)(x^2 + xt + t^2 + 2) = 0$$

$$x^2 + xt + t^2 + 2 = (x + \frac{t}{2})^2 - \frac{t^2}{4} + t^2 + 2 = (x + \frac{t}{2})^2 + \frac{3}{4}t^2 + 2 > 0 \text{ より}$$

$x - t = 0$ なので、 $x = t$

$$x^3 + 1 = 2x$$

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \text{ を因数分解して、} (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

これを解くと、 $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$