問）$m^4=2^n+17$ を満たす自然数 m、n をすべて求めよ。

フェルマーの小定理より　$m^4\equiv 1 \pmod 5$

n が奇数のとき、つまり $n=2a+1$(a は自然数)とすると

$2^n+17=2^{2a+1}+17=2\cdot 2^{2a}+17=2\cdot 4^a+17$

$=2\cdot(5-1)^a+17\equiv 2\cdot(-1)^a+17\equiv 0,4 \pmod 5$

ゆえに、n は奇数ではない。

n が偶数のとき、つまり $n=2a$(a は自然数)とすると

$2^n+17=2^{2a}+17=4^a+17$

$=(5-1)^a+17\equiv(-1)^a+2\equiv 1,3 \pmod 5$

ゆえに、n は偶数である。 n に 2a を代入する。

$m^4=2^{2a}+17$

$m^4-2^{2a}=17$　因数分解して　　$(m^2+2^a)(m^2-2^a)=17$

17 が素数なので

$m^2+2^a=17$　　$m^2-2^a=1$　　の組み合わせのみとなる。

$2\cdot m^2=18$　　$2\cdot 2^a=16$　　　ゆえに、a=3

（答え）m=3　n=6