

問) $a + b + c = 2022$ 、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2022}$ のとき、

$\frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}}$ の値を求めよ。

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{2022}$$

$$a + b + c = 2022 \text{ より } \frac{ab+bc+ca}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc \text{ 展開して整理すると } (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

ゆえに $a = -b$ または $b = -c$ または $c = -a$

$a = -b$ のとき、 $c=2022$ である。

$$\frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} = \frac{1}{(-b)^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} = -\frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} = 0 \text{ なので}$$

$$\frac{1}{a^{2023}} + \frac{1}{b^{2023}} + \frac{1}{c^{2023}} = \frac{1}{2022^{2023}}$$

$b = -c$ または $c = -a$ のときも同様に計算して、同じ結果になる。