

問) $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + x! = y^2$ をみたす自然数 x 、 y の組み合わせをすべて求めよ。

x が 5 以上のとき、 $x! \equiv 0 \pmod{5}$ である。

$P = 1! + 2! + 3! + 4! + \dots + x!$ とおくと

$1! + 2! + 3! + 4! = 33$ なので

x が 5 以上のとき、 $P \equiv 3 \pmod{5}$

y は自然数なので、 $y^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$ P と y^2 が一致しない。

ゆえに、 x は 4 以下である。

$P = 1! + 2! + 3! + 4! = 33$

$P = 1! + 2! + 3! = 9$

$P = 1! + 2! = 3$

$P = 1! = 1$

題意をみたすのは、 $x = 1, 3$

ゆえに $(x, y) = (1, 1), (3, 3)$